数理解析研究所講究録
1173 巻 2000 年 184-191

Fourier expansion of holomorphic Siegel modular forms of genus n along the minimal parabolic subgroup

東大数理　成田　宏秋 (Hiro-aki Narita)

§1 序文

保型形式の整数論において、フーリエ展開の考察は基本的かつ重要である。例えばそれは、保型 L 関数の構成の出発点を与え ([A],[K-S] 参照)、フーリエ展開の各項に現れるフーリエ係数は2次形式論との関係などから重要な考察対象であり続けてきた。ここでの我々の興味の対象は正則ジーゲル保型形式のフーリエ展開であり、中でも極小放物型部分群に関する展開を扱う。正則ジーゲル保型形式のフーリエ展開は主に極大放物型部分群に関するものが調べられてきた。具体的にはジーゲル放物型部分群に関する展開が最も古典的で、C.L.Siegel が自身の2次形式論の研究の中でその詳しい考察をはじめた ([S] 参照)。それ以外の極大放物型部分群に関する展開つまり、フーリエ-ヤコビ展開も盛んに研究されてきており ([E-Z],[P],[Z] 参照)、例えばそれは斎藤-黒川リフト (その一般化が最近池田 保氏により得られている) の構成において重要な役割を担う。正則ジーゲル保型形式のフーリエ展開は、実シンプレクティック群 $Sp(n;\mathbb{R})$ の放物型部分群の (共役を無視した) 選び方分あり 2^n 個あるが、この中でも極小放物型部分群に関する展開は最も粗い展開といえる。いままでに $n=2,3$ の場合について構成をしたのだが ([N-1],[N-2])、最近 n が一般でスカラー値の正則ジーゲル保型形式について構成できたのでここにその紹介をする。

§2 定式化

先ずいくつか記号を用意する。群 $G = Sp(n;\mathbb{R}) := \{g \in SL(2n,\mathbb{R}) \mid {}^tg\,Jg = J\}$ とする。ここに $J = \begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix}$。群 G の岩澤分解を NAK と記すと、極大冪単部分群 N は $N = N_L \rtimes N_S$ と表せて

$$N_L := \left\{ x_L = \begin{pmatrix} X_L & \\ & {}^tX_L{}^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; X_L \in U_n \right\} (U_n \text{ は } GL_n(\mathbb{R}) \text{ の標準的極大べき単部分群});$$

$$N_S := \left\{ x_S = \begin{pmatrix} 1_n & X_S \\ & 1_n \end{pmatrix} \;\middle|\; X_S = {}^tX_S \right\}.$$

極大分裂的トーラス部分群 A は $A = \left\{ \begin{pmatrix} A_n & \\ & A_n^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; A_n = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\ a_i \in \mathbb{R}_+ \right\}$ で与えられる。極大コンパクト部分群 K は $G \cap O(2n)$ ($O(2n)$ は次数 $2n$ の直交群) で与え、これは写像 $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \to A + \sqrt{-1}B$ により、n 次のユニタリー群 $U(n)$ に同型に写る。

群 G のリー環を $\mathfrak{g}$ とすると、カルタン対合 $\mathfrak{g} \ni X \to \theta(X) := -{}^tX \in \mathfrak{g}$ により、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ と分解する。ここに $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}$、$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$ であり、$\mathfrak{k}$ は K のリー環を与える。リー環 $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は、$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$ と分解する。ここに $\mathfrak{k}$ の中心の $\mathfrak{p}$ への随伴作用は $\mathfrak{p}$ の複素構造を与え、$\mathfrak{p}^+$、$\mathfrak{p}^-$ はそれぞれその複素構造に関する $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の正則成分、反正則成分を表す。ここで正則ジーゲル保型形式の定義を与える。

定義 2.1 正の偶数 $\kappa > n$ に対して、群 G 上の C^∞ 関数 $f : G \to \mathbb{C}$ が、不連続群 $\Gamma := Sp(n;\mathbb{Z})$ に関する重さ κ の正則保型形式とは、それが以下を満たすことをいう。
(1) 任意の $k = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$、$g \in G$、$\gamma \in \Gamma$ に対して、

$$f(kg\gamma) = \det(A\sqrt{-1} + B)^\kappa f(g)$$

が成立する。
(2) 任意の $X \in \mathfrak{p}^-$ に対して、$dR_X f = 0$ が成立（コーシーリーマン条件)。ここに dR は右平行移動の微分を表す。 □

ここで正則保型形式 f の、G の放物型部分群 P に関するフーリエ展開の定式化を行う。P の冪単根基を N_P と記し $N_P(\mathbb{Z}) := N_P \cap \Gamma$ とおく。このとき $g \in G$ を固定し $f(ng)(n \in N_P)$ を $L^2(N_P(\mathbb{Z})\backslash N_P)$ (商集合 $N_P(\mathbb{Z})\backslash N_P$ 上２乗可積分関数の空間) の元と見る。$N_P(\mathbb{Z})\backslash N_P$ はコンパクトなので、$L^2(N_P(\mathbb{Z})\backslash N_P)$ は次のような離散的な分解をもつ。

$$L^2(N_P(\mathbb{Z})\backslash N_P) \simeq \tilde{\bigoplus}_{(\eta,H_\eta)\in\hat{N}_P} m(\eta)H_\eta \simeq \tilde{\bigoplus}_{(\eta,H_\eta)\in\hat{N}_P} \mathrm{Hom}_{N_P}(\eta, L^2(N_P(\mathbb{Z})\backslash N_P)) \otimes H_\eta,$$

ここに $\hat{N}_P$ は N_P の既約ユニタリー表現の同値類を表し、$m(\eta) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{N_P}(\eta, L^2(N_P(\mathbb{Z})\backslash N_P)) < \infty$、$\tilde{\bigoplus}$ はヒルベルト直和を表す。絡作用素の空間 $\mathrm{Hom}_{N_P}(\eta, L^2(N_P(\mathbb{Z})\backslash N_P))$ の基底を $\{\Theta_\eta^m\}_{1\le m\le m(\eta)}$ とすると、上の分解に沿って f は次のように展開される。

$$f(xg) = \sum_{\eta\in\hat{N}_P} \sum_{1\le m\le m(\eta)} \Theta_\eta^m(W_\eta^m(g))(x), \quad (x \in N)$$

ここに $W_\eta^m(g) \in H_\eta$ はフーリエ展開の (η, m)-成分を表すものとする。これを f の放物型部分群 P に関するフーリエ展開という。放物型部分群 P が極大放物型部分群のときは、よく知られたフーリエ展開である。つまり、P がジーゲル放物型部分群 (冪単根基が可換な極大放物型部分群) のときは古典的なフーリエ展開であり、それ以外の極大放物型部分群に関する展開は、フーリエ-ヤコビ展開ということになる。そして我々の考察対象は **P が極小放物型部分群のとき**でありこの場合 $N_P = N$ である。

以上の定式化から、極小放物型部分群に沿ったフーリエ展開を構成するには次の２つを完了させねばならぬことが分かる。

(1)W_η^m を明示的に与える。
(2) 重複度 $m(\eta)$、及び $\mathrm{Hom}_N(\eta, L^2(N_{\mathbb{Z}}\backslash N))$ を具体的に与える。

ここに $N_{\mathbb{Z}} := N \cap Sp(n;\mathbb{Z})$。(1) の W_η^m は、正則離散系列に対する一般化ホウィッタカー関数と呼ばれるもので、これは§4 で詳しく扱う。(2) は L.Corwin と F.P.Greenleaf によるべき零リー群の格子部分群による商集合上の L^2-空間のスペクトル分解に関する結果を用いることで完了でき、これは§5 で触れる。

§3 記号、準備

§3.1 ルート系

群 A のリー環 $\mathfrak{a} = \oplus_{1\le i\le n}\mathbb{R}H_i$ は、リー環 $\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{p}$ の極大可換部分代数を与える。ここに $H_i := E_{ii} - E_{i+n,i+n}$ であり、E_{ij} は (i,j) 成分のみが 1 である行列単位を表す。リー環 $\mathfrak{a}$ に関するルート系 $\Delta(\mathfrak{a},\mathfrak{g})$ は、$e_i(H_j) = \delta_{ij}$ で定義される $\mathfrak{a}$ 上の線形形式 e_i を用いて、

$$\{\pm(e_i \pm e_j),\ \pm 2e_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\}$$

で与えられ、正ルート系 $\Delta^+(\mathfrak{a},\mathfrak{g}) := \{e_i \pm e_j,\ 2e_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\}$ の元 α に対応するルートベクトル E_α は、次で与えられる

$$E_{e_i+e_j} = E_{i,j+n} + E_{j,i+n}, \quad E_{e_i-e_j} = E_{ij} - E_{j+n,i+n}, \quad E_{2e_k} = E_{k,k+n}.$$

このとき N のリー環 $\mathfrak{n}$ は

$$\mathfrak{n} = \oplus_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{a},\mathfrak{g})}\mathbb{R}E_\alpha$$

と表せる。さらに $\mathfrak{n}_S$ 及び $\mathfrak{n}_L$ をそれぞれ N_S、N_L のリー代数とし、$\Delta_S := \{e_i + e_j \mid 1 \le i \le j \le n\}$、$\Delta_L := \{e_i - e_j \mid 1 \le i < j \le n\}$ とおくと

$$\mathfrak{n}_S = \oplus_{\alpha\in\Delta_S}\mathbb{R}E_\alpha,\ \mathfrak{n}_L = \oplus_{\alpha\in\Delta_L}\mathbb{R}E_\alpha,$$

と表せる。

次にコンパクトカルタン部分対数 $\mathfrak{t} = \oplus_{1\le i\le n}\mathbb{R}T_i$ に関するルート系を考える。ここに $T_i := E_{i,i+n} - E_{i+n,i}$ である。より正確には絶対ルート系 $\Delta(\mathfrak{t}_\mathbb{C},\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ を考える。$\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ 上の線形形式 f_i を $f_i(T_j) = \sqrt{-1}\delta_{ij}$ で定義すると、それは次で与えられる

$$\{\pm(f_i \pm f_j),\ \pm 2f_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\}$$

正ルート系は $\Delta^+ = \{f_i \pm f_j,\ 2f_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\}$ で与えられ、負ルート $-\beta$ $(\beta \in \Delta^+)$ に対応するルートベクトル $F_{-\beta}$ はつぎで与えられる

$$\begin{aligned}
F_{-f_i-f_j} &= E_{ij} + E_{ji} - E_{i+n,j+n} - E_{j+n,i+n} - \sqrt{-1}(E_{i,j+n} + E_{j+n,i} + E_{i+n,j} + E_{j,i+n}),\\
F_{-f_i+f_j} &= E_{ij} - E_{ji} + E_{i+n,j+n} - E_{j+n,i+n} + \sqrt{-1}(E_{i+n,j} + E_{j+n,i} - E_{i,j+n} - E_{j,i+n}),\\
F_{-2e_k} &= E_{kk} - E_{k+n,k+n} - \sqrt{-1}(E_{k,k+n} + E_{k+n,k}).
\end{aligned}$$

非コンパクトな正ルート全体は $\Delta_n^+ = \{f_i + f_j, \mid 1 \le i \le j \le n\}$ で与えられ、

$$\mathfrak{p}^\pm = \oplus_{\beta\in\Delta_n^+}\mathbb{C}F_{\pm\beta}$$

が成り立つ。ここで§4での議論のために、$\mathfrak{p}^-$ の元の岩澤分解を用意しておく。そのために、$\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ の元

$$X_{ij} = -E_{ij} + E_{ji} - E_{i+n,j+n} + E_{j+n,i+n} + \sqrt{-1}(E_{i+n,j} + E_{j+n,i} - E_{i+n,j} - E_{j+n,i}$$

を与える。これは、同型写像 $\mathfrak{k}_\mathbb{C} \ni \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \to A + \sqrt{-1}B \in \mathfrak{u}(n)_\mathbb{C}$ ($\mathfrak{u}(n)$ は n 次のユニタリーリー代数) により、$-2E_{ij}$ 写るものである。

補題 3.1 以下において、A の $\mathfrak{p}$ に対する随伴作用を Ad で記す。このとき $F_{-\beta}(\beta \in \Delta_n^+)$ の岩澤分解は次で与えられる。

$$\begin{aligned}
F_{-f_i-f_j} &= 2a_i a_j^{-1}\,\mathrm{Ad}(a^{-1})E_{e_i-e_j} - 2a_i a_j\sqrt{-1}\,\mathrm{Ad}(a^{-1})E_{e_i+e_j} + X_{ij},\\
F_{-2e_k} &= -2a_k^2\sqrt{-1}\,\mathrm{Ad}(a^{-1})E_{2e_k} + H_k + \sqrt{-1}T_k.
\end{aligned}$$

□

§.3.2 $\hat{N}$ の既約ユニタリー表現

冪零リー群 N の既約ユニタリー表現について述べると、A.A.Kirillov によるよく知られた構成方法 (オービットメソッド) から次が分かる。

命題 3.2([C-G] 定理 2.2.1〜2.2.4 参照) (1) $\mathfrak{n}^*$ を N のリー代数 $\mathfrak{n}$ の双対空間とする。すべての N の既約ユニタリー表現 η は、$l \in \mathfrak{n}^*$ を用いて

$$\eta = \eta_l := L^2\text{-}\operatorname{Ind}_M^N \chi_l$$

と書ける。ここに、$M = \exp(\mathfrak{m})$ で $\mathfrak{m}$ は内積 $l([\cdot,\cdot])$ に関する $\mathfrak{n}$ の極大等長部分空間でかつ $\mathbb{R}$-代数となるもの (以下、偏極部分代数と呼ぶ) を表し、χ_l は M 上の指標で、$\chi_l(m) := \exp 2\pi\sqrt{-1}(\log(m))$ $(m \in M)$ と定義される。
(2) $\mathfrak{n}^*$ の２つの元、l, l' に対し、$\eta_l \simeq \eta_{l'}$ が成り立つための必要十分条件は、ある $n \in N$ により $\mathrm{Ad}^*\, n\cdot l = l'$ が成り立つことである。ここに Ad^* は N の $\mathfrak{n}^*$ 上の余随伴作用を表す。即ち、

$$\hat{N} \simeq \mathfrak{n}^*/\,\mathrm{Ad}^*\, N$$

が成り立つ。 □

一般に各 $l \in \mathfrak{n}^*$ に対し、その偏極部分代数 $\mathfrak{m}$ は一意的ではない。以下の補題から $\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{n}_S$ となるように取れることが分かる。

補題 3.3([C-G] 定理 1.3.5 参照) $\mathfrak{f}$ を実 m 次元べき零リー代数で以下のような、部分イデアルの列を持つものとする:

$$\{0\} \subset \mathfrak{f}_1 \subset \mathfrak{f}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{f}_m = \mathfrak{f},$$

ここに $\mathfrak{f}_i (1 \le i \le m)$ は次元 i のイデアルを表す。このとき、$f \in \mathfrak{f}^*$ に対し、$f_i := f|_{\mathfrak{f}_i}$ とおき、$\mathfrak{r}(f_i) := \{X \in \mathfrak{f}_i \mid f_i([X,Y]) = 0\ \forall Y \in \mathfrak{f}\}$ と定義すると、$\sum_{1\le i\le m} \mathfrak{r}(f_i)$ は f の偏極部分代数を与える。 □

リー代数 $\mathfrak{n}$ については、部分代数 $\mathfrak{n}_S$ が可換であることが効いて、補題の条件を満たすイデアルの列で $\mathfrak{n}_S$ を含むようなものが取れることが分かる。
以下偏極部分代数 $\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{n}_S$ を含むものと仮定する。次節の議論のために下記の補題を与える。

補題 3.4 表現 $\eta_l \in \hat{N}$ の無限小作用 $d\eta_l$ は以下で与えられる。

$$d\eta_l(E_{e_i\pm e_j}) = 0\ (i < j < n_1), \quad d\eta_l(E_{2e_k}) = 0\ (k < n_1); \tag{1}$$

$$d\eta_l(E_{e_i+e_j}) = 2\pi\sqrt{-1}\xi_{ij}({}^tX_L\, Y_n(l) X_L)\ (n_1 \le i \le j); \tag{2}$$

$$d\eta_l(E_{e_i-e_j}) = \frac{d}{dx'_{ij}} + \sum_{1\le u<i} x'_{ui}\frac{d}{dx'_{uj}}\ (n_1 \le i < j), \tag{3}$$

ここに、(2) において、$Y_n(l)$ は $l(\log(x_S)) = \mathrm{Tr}(Y_n(l)X_S)$ で特徴付けられる次数 n の対称行列であり、$\xi_{ij}({}^tX_L\, Y_n(l)X_L)$ は行列 ${}^tX_L\, Y_n(l)X_L$ の (i,j) 成分の $(2-\delta_{ij})$ 倍を表す。(3) においては、x'_{ij} は行列 X_L の (i,j) 成分を表している。

§4 一般化ホウィッタカー関数の明示公式

§2 で与えたフーリエ展開の定式化において現れた W_η^m は、$\tau = \det^\kappa (\kappa > n)$ を極小 K-タイプに持つ正則離散系列表現 π に対する一般化ホウィッタカー関数であり、それは次のように定義される。

定義 4.1 表現 $\eta \in \hat{N}$ に対して、K-埋め込み $I : \tau \hookrightarrow \pi$ による引き戻し写像

$$I^* : \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi, C^\infty\text{-}\operatorname{Ind}_N^G \eta) \to \mathrm{Hom}_K(\tau, C^\infty\text{-}\operatorname{Ind}_N^G \eta)$$

を考える。ここにτ^*はτの反傾表現$\det^{-\kappa}$を記し、H_η^∞をH_ηのC^∞ベクトル全体とする。このとき写像I^*の像の元を、π**に対する**K**-タイプ**τ**の一般化ホウィッタカー関数**という。 □

ここで$\mathrm{Hom}_K(\tau, C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G\,\eta)$は自然に以下の空間と同一視できることを注意しておく。

$$C^\infty_{\eta,\tau^*}(N\backslash G/K) :=$$
$$\{W : G \text{上の } H_\eta^\infty\text{-値 } C^\infty \text{ 関数} \mid W(ngk) = \eta(n)\tau^*(k)^{-1}W(g)\ \forall(n,g,k) \in N \times G \times K\}.$$

このとき以下の同一視がよく知られている。

$$\mathrm{Im}\, I^* \simeq \{W_{\kappa,l} \in C^\infty_{\eta,\tau^*}(N\backslash G/K) \mid dR_X \cdot W_{\kappa,l} = 0\ \forall X \in \mathfrak{p}^-\}.$$

ここにdRは右移動Rの微分作用を表し、上記の右の空間の条件はコーシーリーマン条件と呼ばれ定義2.1においても出てきた。補題3.4で与えたリー環$\mathfrak{n}$の無限小作用、$\mathfrak{a} \ni H_i$による無限小作用がオイラー作用素$a_i\frac{\partial}{\partial a_i}$で与えられること、$\mathfrak{k} \ni X_{ij}, T_i$による無限小作用がそれぞれ、0倍、$\kappa$倍で与えられること、以上3つに注意し、それらを補題3.1で与えた$\mathfrak{p}^-$の元の岩澤分解に当てはめる。するとコーシーリーマン条件から生じる微分方程式が以下のように記述できる。

命題4.2 (1)

$$\left(\frac{d}{dx'_{ij}} + \sum_{1\le u\le i} x'_{ui}\frac{d}{dx'_{uj}}\right)W_{\kappa,l}(x_La) + 2\pi a_j^2\xi_{ij}({}^tX_L Y_n(l) X_L)W_{\kappa,l}(x_La) = 0,$$

$(n_1 \le i < j \le n)$;
(2)

$$a_k\frac{\partial}{\partial a_k}W_{\kappa,l}(x_La) + 4\pi a_k^2\xi_{kk}({}^tX_L Y_n(l) X_L)W_{\kappa,l}(x_La) - \kappa W_{\kappa,l}(x_La) = 0,$$

$(n_1 \le k \le n)$.
ここに$i < j \le n_1$及び$k < n_1$に対する上記の微分方程式は、すべて自明である。 □

一般化ホウィッタカー関数は、上の微分方程式で特徴づけられる。それらを解くことで次の結果が得られる。

定理4.3 フーリエ展開に現れる一般化ホウィッタカー関数はAに関する増大度が高々緩増加(即ち、多項式増大度)でなければならないことから、以下の空間を導入する。

$$\mathcal{A}_{\eta_l}(N\backslash G) := \{W \in C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_N^G\,\eta_l \mid W|_A \text{は緩増加}\}.$$

このとき各表現$\eta_l \in \hat{N}$について、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi, \mathcal{A}_{\eta_l}(N\backslash G)) \le 1$$

が成立する。特に、等号成立の必要十分条件は$Y_n(l)$が半正定値且つ$\chi_l(M \cap N_L) = \{1\}$が成立することで、そのとき一般化ホウィッタカー関数のN_LAへの制限の明示公式は

$$C(a_1a_2\cdots a_n)\exp(-2\pi\,\mathrm{Tr}({}^t(X_LA_n)\,Y_n(l)(X_LA_n)))$$

で与えられる。ここにCは任意定数を表す。 □

注意4.4($SU(n,n)$の場合) 最近、符号(n,n)の特殊ユニタリー群$G = SU(n,n) := \{g \in SL_{2n}(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{g}Jg = g\}$の場合についても、同様の結果が得られたのでここにその紹介をする。$SU(n,n)$の場合N_S及びN_Lに対応するものはそれぞれ、

$$N_S = \left\{x_S = \begin{pmatrix} 1_n & X_S \\ & 1_n \end{pmatrix} \middle|\ X_S = {}^t\overline{X_S}\right\},\quad N_L = \left\{x_L = \begin{pmatrix} X_L & \\ & {}^t\overline{X_L}^{-1} \end{pmatrix} \middle|\ X_L \in U_n(\mathbb{C})\right\},$$

で与えられる。ここに $U_n(\mathbb{C})$ は $GL_n(\mathbb{C})$ の標準的極大冪単部分群を表す。極大分裂的トーラス部分群 A は $Sp(n;\mathbb{R})$ の場合のそれと同じである。$N = N_S \rtimes N_L$ とし N のリー環を $\mathfrak{n}$、その双対空間を $\mathfrak{n}^*$ と記す。線形形式 $l \in \mathfrak{n}^*$ に対し $Y_n(l)$ 及び $\mathcal{A}_{\eta_l}(N\backslash G)$ を $Sp(n;\mathbb{R})$ の場合と同様に定義し、π を極小 K-タイプが 1 次元である正則離散系列とする。以上の記号を用いると

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)}(\pi, \mathcal{A}_{\eta_l}(N\backslash G)) \leq 1$$

が成立し、等号成立の必要十分条件は、$Y_n(l)$ が半正定値で $\chi_l(M \cap N_L) = \{1\}$ が成り立つことである。そのとき一般化ホウィッタカー関数の $N_L A$ への制限の明示公式は

$$W_{\kappa,l}(x_L a) = C(a_1 a_2 \dots a_n)^{\kappa} \exp(-2\pi \operatorname{Tr}({}^t\overline{(X_L A)}\, Y_n(l)(X_L A)))$$

で与えられる (C は任意定数)。ここに κ は π の極小 K-タイプのパラメーターで $2n-1$ より大きい正の整数で与えられる。

このような結果が得られるのは、制限ルート系が C_n 型 (つまり、対応する対称領域 G/K が tube domain) であるということが本質的なのではないかと考えている。現在、正則離散系列に対する一般化ホウィッタカー関数を、すべての古典型 C_n タイプの実半単純リー群について考察しており、それらは上記のような形で統一的に捉えられるのではないかと期待している。 □

§5 フーリエ展開の構成

前節で一般化ホウィッタカー関数の明示公式を与えたので、フーリエ展開の構成を完了するには、§2 定式化の最後のほうで述べた (2)、つまり表現 $\eta_l \in \hat{N}$ の $L^2(N_{\mathbb{Z}}\backslash N)$ における重複度 $m(\eta_l)$、$\mathrm{Hom}_N(\eta_l, L^2(N_{\mathbb{Z}}\backslash N))$ の基底の具体的な記述を与えることが残っている。これについては L.Corwin と F.P.Greenleaf の結果 [C-G-2] を用いて完了できる。

命題 5.1([C-G-2] 定理 5.1 及び第 6 節参照) 線形形式 $l \in \mathfrak{n}$ を $l(\log(N_{\mathbb{Z}})) \subset \mathbb{Q}$ が成り立つものとし、その $\mathbb{Q}$-rational な偏極部分代数を $\mathfrak{m}$ と記し $M := \exp(\mathfrak{m})$ とおく。ここに $\mathfrak{m}$ が $\mathbb{Q}$-rational とは、$\mathfrak{n}_{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q}$-span of $\{\log(N_{\mathbb{Z}})\}$ とおいたときに $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}_{\mathbb{Q}}$ が $\mathfrak{m}$ の $\mathbb{Q}$-structure を与えていることをいう。$\{(\chi_l, M)\}$ に対する群 N の作用 Ad^* を、

$$\mathrm{Ad}^*\, n \cdot (\chi_l, M) := (\chi_{\mathrm{Ad}^*\, n \cdot l}, nMn^{-1})$$

で定める。更に $O(l)_{\mathbb{Z}} := \{(\chi_{l'}, M') \in \mathrm{Ad}^*\, N_{\mathbb{Q}} \cdot (\chi_l, M) \mid \chi_{l'}(M' \cap N_{\mathbb{Z}}) \subset \mathbb{Z}\}$ とおく ($N_{\mathbb{Q}}$ は N の $\mathbb{Q}$ 有理点全体)。

(1) このとき重複度 $m(\eta_l)$ は商集合 $\mathfrak{M}(l) := O(l)_{\mathbb{Z}}/\,\mathrm{Ad}^*\, N_{\mathbb{Z}}$ の位数で与えられる。

(2) $(\chi_{l'}, M') \in \mathfrak{M}(l)$ に対して、$\Theta_{l'} \in \mathrm{Hom}_N(\eta_{l'}, L^2(N_{\mathbb{Z}}\backslash N))$ を

$$\Theta_{l'}(h)(n) := \sum_{\gamma \in M \cap N_{\mathbb{Z}} \backslash N_{\mathbb{Z}}} h(\gamma n) \quad h \in H_{\eta_{l'}}$$

で定義する。このとき $\bigoplus_{\{(\chi_{l'}, M') \in \mathfrak{M}(l)\}} \Theta_{l'}(H_{\eta_{l'}})$ は $L^2(N_{\mathbb{Z}}\backslash N)$ の η_l-同型成分を為す。 □

ここで新たにいくつか記号を用意する。$\mathfrak{n}_S^*$ を $\mathfrak{n}_S$ の双対空間とし、$l \in \mathfrak{n}_S^*$ を $l|_{\mathfrak{n}_L} \equiv 0$ とおくことで、$l \in \mathfrak{n}^*$ とみなす。そして N の $\mathfrak{n}_S^*$ への余随伴作用を Ad_S^* と記す。前節の定理 4.3 より我々がこれから扱う表現 η_l は $Y_n(l)$ が半正定値なる $l \in \mathfrak{n}_S^*$ に付随しているもののみでよいことが分かる。このような l に対し、$\mathfrak{n}_S$ を含む $\mathfrak{m}$ は一意的に定まりしかも l が $\mathbb{Q}$-rational ならばそれは $\mathbb{Q}$-rational な偏極部分代数になることが分かる。このような $\mathbb{Q}$-rational な線形形式 l にたいして上の命題の (1) は次のように書き直せる。

命題 5.2 以下において $N_L(\mathbb{Q})$、$N_L(\mathbb{Z})$、$N_S(\mathbb{Z})$ をそれぞれ N_L の $\mathbb{Q}$ 有理点、$\mathbb{Z}$ 有理点及

び N_S の $\mathbb{Z}$ 有理点全体を表すとする。
このとき $O(l)_{\mathbb{Z}}$ は集合 $\{l' \in \mathrm{Ad}_S^* N_L(\mathbb{Q}) \cdot l \mid l'(N_S(\mathbb{Z})) \subset \mathbb{Z}\}$ と全単射であり、$O(l)_{\mathbb{Z}}$ をこの集合と同一視すると $\mathfrak{M}(l) \simeq O(l)_{\mathbb{Z}} / \mathrm{Ad}_S^* N_L(\mathbb{Z})$ が成り立つ。 □

また上記の $l \in \mathfrak{n}_S^*$ に対し、全単射 $M \cap N_L(\mathbb{Z}) \backslash N_L(\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Ad}_S^* N_L(\mathbb{Z}) \cdot l$ が成り立つことも注意しておく。以上の結果を考慮に入れ、第1節で与えた定式化に沿って正則ジーゲル保型形式 f のフーリエ展開を構成すると次が得られる。

定理 5.3

$$f(xa) = \sum_{\substack{\Xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)\in\mathbb{Q}^n_{\geq 0} \\ O(l_\Xi)_{\mathbb{Z}}=\emptyset}} \sum_{l\in\mathfrak{M}(l_\Xi)} C^l_\Xi \Theta_l(W_{\kappa,l}(*a))(x),$$

ここに $l_\Xi \in \mathfrak{n}_S^*$ は $Y_n(l_\Xi) = \mathrm{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ で特徴付けられるもので、C^l_Ξ はフーリエ係数を表し、

$$\Theta_l(W_{\kappa,l}(*a))(x) := \sum_{l'\in \mathrm{Ad}_S^* N_L(\mathbb{Z})\cdot l} \chi_{l'}(x_s)(a_1 a_2 \cdots a_n)^\kappa \exp(-2\pi \operatorname{Tr}({}^t(X_L A_n)\, Y_n(l')(X_L A_n))).$$

□

上記のフーリエ展開をジーゲル上半空間

$$\mathfrak{H} := \{Z = X + \sqrt{-1}Y \mid X、Y \text{ は } n \text{ 次対称行列で } Y \text{ は正定値}\}$$

の重さ κ の正則保型形式 $f(Z)$ に対して書き直す。そのために以下の記号を導入する。先ず $\mathfrak{R}$ を n 次の半正定値半整数対称行列全体とする。そして商集合 $\tilde{\mathfrak{R}} := \mathfrak{R}/\sim$ を同値関係

$$S \sim S'(S, S' \in \mathfrak{R}) \leftrightarrow \exists\gamma \in U_n(\mathbb{Q})(U_n \text{ の } \mathbb{Q}\text{-有理点全体}) \text{ s.t. } S = {}^t\gamma S'\gamma$$

により定義する。$\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$ に対し

$$\mathfrak{R}_\Xi := \{T \in \mathfrak{R} \mid \text{ある } \gamma \in U_n(\mathbb{Q}) \text{ によって } {}^t\gamma T\gamma = \mathrm{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\}$$

とおく。すると

$$\tilde{\mathfrak{R}} \simeq \{\Xi \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0} \mid \mathfrak{R}_\Xi = \emptyset\}$$

という同一視ができる。さらに $\mathfrak{R}_\Xi$ に対しても同値関係

$$S \sim S'(S, S' \in \mathfrak{R}_\Xi) \leftrightarrow \exists\gamma \in U_n(\mathbb{Z})(U_n \text{ の } \mathbb{Z}\text{-有理点全体}) \text{ s.t. } S = {}^t\gamma S'\gamma$$

を与え $\mathfrak{M}(\Xi) := \mathfrak{R}_\Xi/\sim$ とおく。そして各 $T \in \mathfrak{M}(\Xi)$ に対して $\mathfrak{R}(T) := \{{}^t\gamma T\gamma \mid \gamma \in U_n(\mathbb{Z})\}$ とおく。以上の記号を用いて上記のフーリエ展開を次のように書き直すことができる。

定理 5.4

$$f(Z) = \sum_{\Xi\in\tilde{\mathfrak{R}}} \sum_{T\in\mathfrak{M}(\Xi)} C_T \Theta_T(Z),$$

ここに C_T はフーリエ係数を表し、

$$\Theta_T(Z) := \sum_{S\in\mathfrak{R}(T)} \exp(2\pi\sqrt{-1}\operatorname{Tr}(SZ))$$

. □

訂正 講演においては、命題 5.1 は L.Richardson の論文 [R] から出てくると述べたが後になって、それは本研究には適用できないことが確認された。それは偏極部分代数 $\mathfrak{m}$ が [R] の第3節の意味での “special polarization subalgebra” にならないことによる。しかし他方、

L.Corwin と F.P.Greenleaf は論文 [C-G-2] の中で、Richardson の結果の別証明を与えており、しかもそれは一般の $\mathbb{Q}$-rational な偏極部分代数 $\mathfrak{m}$ に対して当てはまる。これは本研究に適用可能である。以上の理由で、講演とは違い命題 5.1 の根拠を論文 [C-G-2] とした次第である。

参考文献

[A] A.N.Andrianov, Dirichlet series with Euler product in the theory of Siegel modular forms of genus 2, Proc. Steklov Inst. Math. 112, (1971), 70-93.

[C-G] L.Corwin and F.P.Greenleaf, Representations of nilpotent Lie groups and their applications, Part 1:Basic theory and examples, Cambridge studies in advanced math. 18

[C-G-2] L.Corwin and F.P.Greenleaf, Intertwining operators for representations induced from uniform subgroups, Acta Math. 136, (1976), 275-301.

[E-Z] M.Eichler and D.Zagier, The theory of Jacobi form, Progr. Math. 55, Birkhaeuser Boston Press, (1990).

[K-S] W.Kohnen and N.P.Skoruppa, A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of genus two, Invent. Math. 95, (1989), 541-558.

[N-1] H.Narita, Fourier expansion of holomorphic Siegel modular forms with respect to the minimal parabolic subgroup, Math. Zeit. 231, (1999), 557-588

[N-2] H.Narita, Fourier expansion of holomorphic Siegel modular forms of genus 3 along the minimal parabolic subgroup, preprint.

[R] L.Richardson, Decomposition of the L^2-space of a general compact nilpotent manifold, Amer. J. Math, vol.93, (1971), 173-190

[S] C.L.Siegel, Ueber die analytische Theorie der quadratischen Formen I, II, III, Ann. Math. 36, (1935), 527-606, Ann Math. 37, (1936), 230-263, Ann. Math. 38, (1937), 212-291.

[Z] C.Ziegler, Jacobi forms of higher degree, Abh. Math. Sem. Univ Hamburg 59, (1989), 191-224